数理解析研究所講究録
272巻 1976年 8-31

最有効確率抽出法とその適用について

統計数理研究所　　田口　時夫

はしがき

歪みの大きい母集団からの標本抽出を扱かう場合，各個体或いは階層に対する抽出確率を変える事によって推定が可能，或いは有効となる事は容易に予想されるが，その根據及び実現の方法についての理論は尚不充分であるといえる。

本稿は一般的不等確率抽出法を基礎にして，その適用の具体的條件と有効限界の検討を通じて最有効確率抽出法を見出すと共に，更にそれを組織的に実現する爲の諸方法を与えるものである。

§1. 最有効確率抽出法の理論的基礎

一般に不等確率抽出法とは，補助変量 Y が与えられた場合，その正値一価関数 $\varphi(Y)$ に比例する抽出確率をもつ抽出法と考える事が出来よう。今此の方法によって得られた標本 $(X^{(i)}, Y^{(i)})$；$i=1,\cdots,n$ を用いて主変量 X の平均 $E(X)$ を推定する

為に，不偏推定量

(1) $\tilde{X}(\varphi)=\frac{1}{n}E\{\varphi(Y)\}\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}}{\varphi(Y^{(i)})}$

を用いるものとすると，その分散 $\sigma^2_{\tilde{X}(\varphi)}$ は

(2) $\sigma^2_{\tilde{X}(\varphi)}=\frac{1}{n}[E\{\varphi(Y)\}E\{\frac{X^2}{\varphi(Y)}\}-E^2(X)]$

となる。

扨，本稿で扱かう最有効確率抽出法とは，次の定義によるものとする。

<u>定義 1.</u>「凡ての Y の関数 φ の集合に於て，$\sigma^2_{\tilde{X}(\varphi)}$ を最小にする $\varphi^{(0)}$ が存在するとき，$\varphi^{(0)}(Y)$ に比例する確率抽出法を，X の平均を推定する為に $\tilde{X}(\varphi)$ を用いた場合の最有効確率抽出法という」

此の場合容易に定理 1 が得られるが，その説明に先立って次の補助定理を証明しよう。

<u>補助定理 1.</u>「$\varphi(y)$ が y の連続正値一価関数であれば，任意の y の連続一価関数 $\psi(y)$ に対して

(3) $[E\{e^{\psi(Y)}\}]^2\leqq E\{\varphi(Y)\}E[\{\varphi(Y)\}\{\frac{e^{\psi(Y)}}{\varphi(Y)}\}^2]$

が成立する。」

証明．一般に $\phi(y)$ が連続な凸関数であれば，$p(y)>0$ のとき Jensen の不等式により

(4) $\phi(\int p\cdot f\,dy/\int p\,dy)\leqq\int p\phi(f)\,dy/\int p\,dy$

が成立する。従って確率変数 Y に対して

(5) $\phi\{E(p\cdot f)/E(p)\} \leqq E\{p\cdot\phi(f)\}/E(p)$

となる。こゝで

(6) $\phi(f)=f^2,\ p(Y)=\varphi(Y),\ f(Y)=\dfrac{e^{\psi(Y)}}{\varphi(Y)}$

とおくと(3)が得られる。(証明おわり)

補助定理1はφ, ψが不連続の場合に容易に拡張することが出来る。

<u>定理</u>1.「主変量Xが正値で，且つ

(7) $\log X = \psi(Y) + \log \zeta,\quad \zeta \perp\!\!\!\perp Y$

と表わされるならば，$e^{\psi(Y)}$に比例する確率抽出法が最有効確率抽出法を与える。又その場合$\tilde{X}(\varphi^{(0)})$の変動係数$C^{(0)}_{\tilde{X}}$は

(8) $C^{(0)}_{\tilde{X}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{\sigma_x}{E(\zeta)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}C_\zeta$

である。こゝでC_ζはζの変動係数を表わす。更に(7)の條件下では

(9) $\psi(Y)=E(\log X|Y)$

であり，従って$\log\zeta$は$\log X$の(9)による回帰残差を表わす。

証明．(7)の條件下で，任意のφに対して$\sigma^2_{\tilde{X}(\varphi)}$は(2)により

(10) $\sigma^2_{\tilde{X}(\varphi)} = \dfrac{1}{n}\left[E\{\varphi(Y)\}E\left\{\dfrac{X^2}{\varphi(Y)}\right\}-E^2(X)\right]$

$\quad = \dfrac{1}{n}\left[E\{\varphi(Y)\}E\left[\varphi(Y)\left\{\dfrac{e^{\psi(Y)}}{\varphi(Y)}\right\}^2\right]E(\zeta^2)-E^2(X)\right]$

となるから，補助定理により

(11) $\sigma^2_{\tilde{X}(\varphi)} \geqq \dfrac{1}{n}\left[E^2\{e^{\psi(Y)}\}E(\zeta^2)-E^2(X)\right]$

$\quad = \dfrac{1}{n}\left[E\{e^{\psi(Y)}\}E\{e^{\psi(Y)}\zeta^2\}-E^2(X)\right]$

$\quad = \dfrac{1}{n}\left[E\{e^{\psi(Y)}\}E\left\{\dfrac{X^2}{e^{\psi(Y)}}\right\}-E^2(X)\right] = \sigma^2_{\tilde{X}(e^{\psi})}$

が成立する。これは $e^{\psi(Y)}$ に比例した確率抽出法が最有効であることを示す。又此の時

(12) $C_x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_x(e^{\psi})}{E(x)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{E(\xi^2)}{E^2(\xi)} - 1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_\xi}{E(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{n}} C_\xi$

となる。更に(7)式の両辺についてYにおける條件附期待値を考えると，

(13) $E(\log X \mid Y) = \psi(Y) + E(\log \xi)$

となり $E(\log \xi)$ はYに関係のない常数であるから，$e^{\psi(Y)}$ 比例は $E(\log X \mid Y)$ 比例となる。（証明おわり）

上記の証明は補助定理1によらずに直接Schwarzの不等式を適用しても得られる。又此の定理はベクトル値補助変量 $\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_k)$ の場合に拡張され得る。

<u>定義</u>2.「$\log X$ の $Y_1, \cdots, Y_k$ に関する回帰関数を $R(\mathbf{Y})$ としたとき，$e^{R(\mathbf{Y})}$ に比例する確率抽出法を回帰関数比例確率抽出法と定義する。特に回帰関数が回帰係数 $\beta_1', \cdots, \beta_k'$ をもつ $\log X$ の $\log Y_1, \cdots, \log Y_k$ に関する最小二乗線形回帰の場合は $\prod_{j=1}^{k} Y_j^{\beta_j'}$ に比例する確率抽出法となるが，これを特に最小二乗対数線形回帰比例確率抽出法という」

此の場合次の定理が得られる。

<u>定理</u>2.「$\log X$ のYに関する(9)式の回帰関数を(7)式の條件を除いて一般に

(14) $R(\mathbf{Y}) = E(\log X \mid \mathbf{Y})$

とすれば，$e^{k(\mathbf{Y})}$ 比例確率抽出法は，最有効確率抽出法の一つの近似を与える。又最小二乗対数線形回帰比例確率抽出法は，最有効確率抽出法の他の近似となり得る。又其の際此等の有効性は，それぞれ $\log X$ の $Y_1, \cdots, Y_k$ に関する重相関比 $\eta'_{X(1\cdots k)}$ 及び $\log X$ の $\log Y_1, \cdots, \log Y_k$ に関する重相関係数 $\rho'_{X(1\cdots k)}$ によって判定され得る。」

証明．$\mathbf{Y}$ の任意の正値一価関数に対して

(15) $X = \zeta_\varphi \varphi(\mathbf{Y})$

と表わすと，$\sigma^2_{\bar{X}(\varphi)}$ は(2)により

(16) $\sigma^2_{\bar{X}(\varphi)} = \frac{1}{n}[E\{\varphi(\mathbf{Y})\}E\{\zeta_\varphi^2 \varphi(\mathbf{Y})\} - E^2\{\zeta_\varphi \varphi(\mathbf{Y})\}]$

と表わされる。従って ζ_φ が1に近く且つ変動が小であれば，つまり $\log \zeta_\varphi$ が0に近く且つその分散が小であるような φ が最有効條件に近いといえる。今 $\varphi(\mathbf{Y})$ として $e^{E(\log X|\mathbf{Y})}$ を用いた時の ζ_φ を特に ζ_e で表わすと

(17) $E(\log \zeta_e) = 0, \quad V(\log \zeta_e) = \min_\varphi V(\log \zeta_\varphi)$

が成立するから，上記の條件に近く従って一つの最有効確率抽出法の近似を与える。又 $\log X$ の $\log Y_1, \cdots \log Y_k$ に関する最小二乗対数線形回帰の残差を $\log \zeta_a$ とすれば，一般に ζ_a は Y_j ; $j=1, \cdots, k$ と無相関であり，これは $\zeta_a \perp\!\!\!\perp Y_j$ の必要條件であるから，定理1により此の抽出法は最有効確率抽出法の他の一つの近似を与えうる。以上の証明に於て，ζ_e や ζ_a

従って $\log\xi_e$ や $\log\xi_a$ の分散がそれぞれの抽出法の有効性の基準を与えることが理解される。それは又 $\gamma'_{x(1\cdots k)}$ や $\rho'_{x(1\cdots k)}$ が判定基準となる事を意味し、定理が証明される。

以上の結果は、次の例題にみるように所得分布に対し特に有用である。

例1. 「(X, Y) が $k+1$ 次元対数正規分布に従うものとする。此の場合最有効確率抽出法は、最小二乗線形回帰比例確率抽出法である。又此の抽出法による $\hat{X}(\varphi^{(0)})$ の変動係数を $C_X^{(0)}$ とすれば

(18) $$C_X^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{e^{\{1-\rho'_{x(1\cdots k)}\}\sigma'^2_x}-1}$$

となる。ここで σ'^2_x は $\log X$ の分散を表わす。」

例2. 「(X, Y) が2次元第2種 Pareto 分布 (Mardia [1] 参照) をもつ場合

(19) $$E\{\log(\tfrac{X}{a})\,|\,Y\} = (1-\beta)p^{-1} + q\beta p^{-1}\{\log(\tfrac{Y}{a})\}$$

となるので、此の場合も最小二乗線形回帰比例確率抽出法が最有効確率抽出法の近似を与える。」

§2. 最有効確率抽出法の実際的諸問題

最有効確率抽出法と、それの近似方式としての回帰関数比例確率抽出法（前節参照）を具体的に適用する場合には次のような諸問題が生じる。第1は補助変量の選択方法であり、次いで層別法の適用条件の考慮と標本の各層への割当の問題

が生じる。更に又，標本の抽出確率の近似計算法を挙げる事が出来る。

(1) 補助変量の撰択について

最有効確率抽出法に於ては，母平均の推定精度の基準として，推定量の分散の代りに変動係数を用いる方が適当である。（前節参照）．その場合層別を無視すると，補助変量の撰択は定理1及び2により，$\log X$ を $R(Y)=E(\log X|Y)$ で回帰した残差を $\log \xi$ とした時，その変動係数を基準とすることが出来る。従って実際上は，$E(\log \xi)$ は 1 に近いものと考えて，$e^{\frac{X}{R(X)}}$ の分散又は $\log X$ と Y との相関比 $\eta_{\log X, Y}$ を基準とする事が考えられる。故に $\log X$ と $\log Y$ とが線形に近い関係にあれば，$\log X$ と $\log Y$ との相関係数が実用的である。

処で一般には，調査項目は $X_1, \cdots X_k$ と複数個に亘るので，正準相関等の利用が予想されるが，特に対数正規母集団に於ては，近似的に項目毎の変動係数を基準として，それを最小とする変量を補助変量とすることが出来る。（拙稿[2] 参照）．その場合最適抽出確率は，此の補助変量に関する各 X_i の対数線形回帰係数 β_i' の平均 $\bar{\beta}'$ を用いて $Y^{\bar{\beta}'}$ に比例する抽出確率となる。

(2) 層別法について

最有効確率抽出法は又独自の層別法を与えることが出来る。

つまり此の方法に於ける層別の本質的な意義は，層化を通じて各層内の残差をYと独立に近い状態に近づけることである。此の事は層別法を定理1における最有効確率抽出法の存在条件を実現させる手段とする事を意味する。他方，此の場合の層別は，抽出作業の技術的簡約化と関連させて行なうことが出来る。例えば $\log X$ の Y に関する回帰関数 $R(Y)$ を折線で近似すれば，各折線の交点 y_i を各層の分点とする事により層化 $e^{\alpha Y}$ 比例確率抽出法が得られる。又 $R(Y)$ を $\log Y$ との関係で捉えて折線で近似すれば，層化 Y^{ν} 比例確率抽出法が得られ，ν が1に近い層は規模比例確率抽出法となる。又 $R(Y)$ を階段関数で近似すれば跳びの生ずる点を各層の分点とすることにより通常の層化無作為抽出法を与えることができる。

(3) サンプルの割当について

(2)で述べた層別法は，層の分点と共に各層内の抽出形態を同時に決定するが，サンプルの割当に関しては，改めて従来の最適割当の諸方式を適用する方が有効である。勿論その場合各層の抽出形態が一般的には不等確率抽出であることを考慮して σ_x^2 の代りに

(20) $$\sigma_x'^2 = E\{\varphi(Y)\}E\left\{\frac{X^2}{\varphi(Y)}\right\} - E^2(X)$$

を用いねばならない。猶費用條件等は最適割当を行なうこの段階で考慮することが出来る。

(4) 抽出確率の近似について

各層内の各個体の抽出確率は簡単な数値で示される事が望ましい。その為に第2次層化を行なうことが考えられるが，その場合の層化基準は，各層内のYの値のオーダーを揃えること，従って10^sを層の分点とすることであろう。つまりその時(2)式をもとにして，与えられた誤差の許容範囲でのY, β_a, Y^{β_a}等の必要桁数を与えうるからである。すなわち今εなる正数εに対して最有効抽出確率を与える$\varphi^{(0)}(y)$との間に

$$(21)\quad (1-\varepsilon)\varphi^{(0)}(y) \leqq \varphi_a^{(0)}(y) \leqq (1+\varepsilon)\varphi^{(0)}(y)$$

の関係にある$\varphi_a^{(0)}(y)$を用いて，$\varphi_a^{(0)}(y)$比例確率抽出法を用いるものとしよう。その場合(2)式により

$$(22)\quad \sigma^2_{\bar{x}(\varphi_a^{(0)})} \leqq \frac{1}{n}\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}E\{\varphi^{(0)}(Y)\}E\left\{\frac{X^2}{\varphi^{(0)}(Y)}\right\} - E^2(X)\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[(1+2\varepsilon)E\{\varphi^{(0)}(Y)\}E\left\{\frac{X^2}{\varphi^{(0)}(Y)}\right\} - E^2(X) + O(\varepsilon^2)\right]$$
$$= \sigma^2_{\bar{x}(\varphi^{(0)})} + 2\varepsilon\left\{\sigma^2_{\bar{x}(\varphi^{(0)})} + \frac{E^2(X)}{n}\right\} + O(\varepsilon^2)$$
$$= \sigma^2_{\bar{x}(\varphi^{(0)})}\left[1+2\varepsilon\left(1+\frac{1}{C_x'^2}\right)\right] + O(\varepsilon^2)$$

但し $(23)\quad C_x' = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{E(X)}$ である。

従って予め与えた許容範囲規定量η

$$(24)\quad 0 < \{\sigma^2_{\bar{x}(\varphi_a^{(0)})} - \sigma^2_{\bar{x}(\varphi^{(0)})}\} / \sigma^2_{\bar{x}(\varphi^{(0)})} < \eta$$

に対してεは

$$(25)\quad \varepsilon < \frac{\eta}{2(1+C_x'^2)}$$

とすればよい。

§3. 抽出法決定の為のデータ解析と最有効確率抽出法のシミュレーション

(1) 抽出法決定の為のデータ解析

最有効確率抽出法の適用例として，補助変量を資本金とした場合の法人企業統計調査を考えてみよう。第1図の各調査項目の資本金に対する対数相関図をみると，一般的に可成りの相関が認められる。従って単に総額の推計のみを目的とする場合は，特に層別を加えずに，最小二乗対数線形回帰比例確率抽出法の単純な適用が可能と思われるが，第1図をより詳細にみると，全体として回帰曲線は log y 軸に凸になる傾向が窺える。更に回帰曲線による残差に着目すると，各資料（第1図）を通じて明かに log Y との相関が認められる。つまり対数残差 log ζ の分散は，一般に log Y が小なる程大である。従って上記の回帰関数比例確率抽出法を，最有効確率抽出法に接近させる為には，層別により各層内の残差と log Y との相関を小にすることが望ましい。此の観点から層別を考えると，資本金額1千万〜5千万階層と5千万〜1億階層とは特に区別する必要が認められないが，他の階層は略妥当であると思われる。但し10億以上層は更に100億円を階層区分することも考えられる。

他方，第1表は各階層別に各抽出法（等確率，規模比例及

び最小二乗対数線形回帰確率比例の諸抽出法）による標本分散規定量 $\sigma'^2_{x_h}$ を計算した結果を示すものであるが，回帰関数比例確率抽出法が此の面でも最も有効であり，特に等確率抽出法に対しては，時に1桁少ない分散を得るのである。

(2) 最有効確率抽出法のシミュレーション

第2表は，資本金10億〜100億の法人階層を対象として上記諸抽出法のシミュレーションを行った結果を示すものである。その際の回帰関数比例確率抽出法は各項目 x_h の資本金 y に関する最小二乗対数線形回帰係数 β_h の項目平均 $\bar{\beta}_h'$ を用いて $y^{\bar{\beta}_h'}$ に比例する抽出確率を用いる抽出法を意味する。各表の全体を通じて回帰関数比例確率抽出法が相対的に安定したよい結果を与えることが理解されよう。然し乍ら此の程度の精度の向上は，稍期待を下廻るものであり，その原因は此の階層における各項目の資本金に対する対数相関が比較的低いことにあると推測される。此の意味で，層内の対数相関をたかめる層別法についての研究が今後必要となるであろう。

むすび

扨，標本設計に於て有効性をたかめることは，如何なる意義をもつであろうか。勿論それは統計数値の信頼性をたかめる反面，標本数の削減による調査の効率化等の直接的効用をもつものであるが，それを経費の節減に直結させることにつ

いては大きな疑惑を抱かざるを得ない。標本精度の有効性の向上によって得られる経費の余剰は，更に統計調査を質的・内面的に充実させる為に標本設計や集計・分析及び調査諸手当の単価の増大に振向けるべきであろう。そして此の方向が真に統計を発達させ，社会に寄与することは云ふまでもないことであろう。

参考文献

[1] Mardia, K.V, Multivariate Pareto distribution, Ann. Math. Statist. Vol. 33 (1962)

[2] 田口 時夫，最有効確率抽出法と同帰関数比例確率抽出法，「統計数理研究所彙報」第24巻，第1号（予定）

[3] 田口 時夫，回帰抽出法の提唱について，「理論・計量経済学会1975年度大会プログラム・報告要旨」理論・計量経済学会

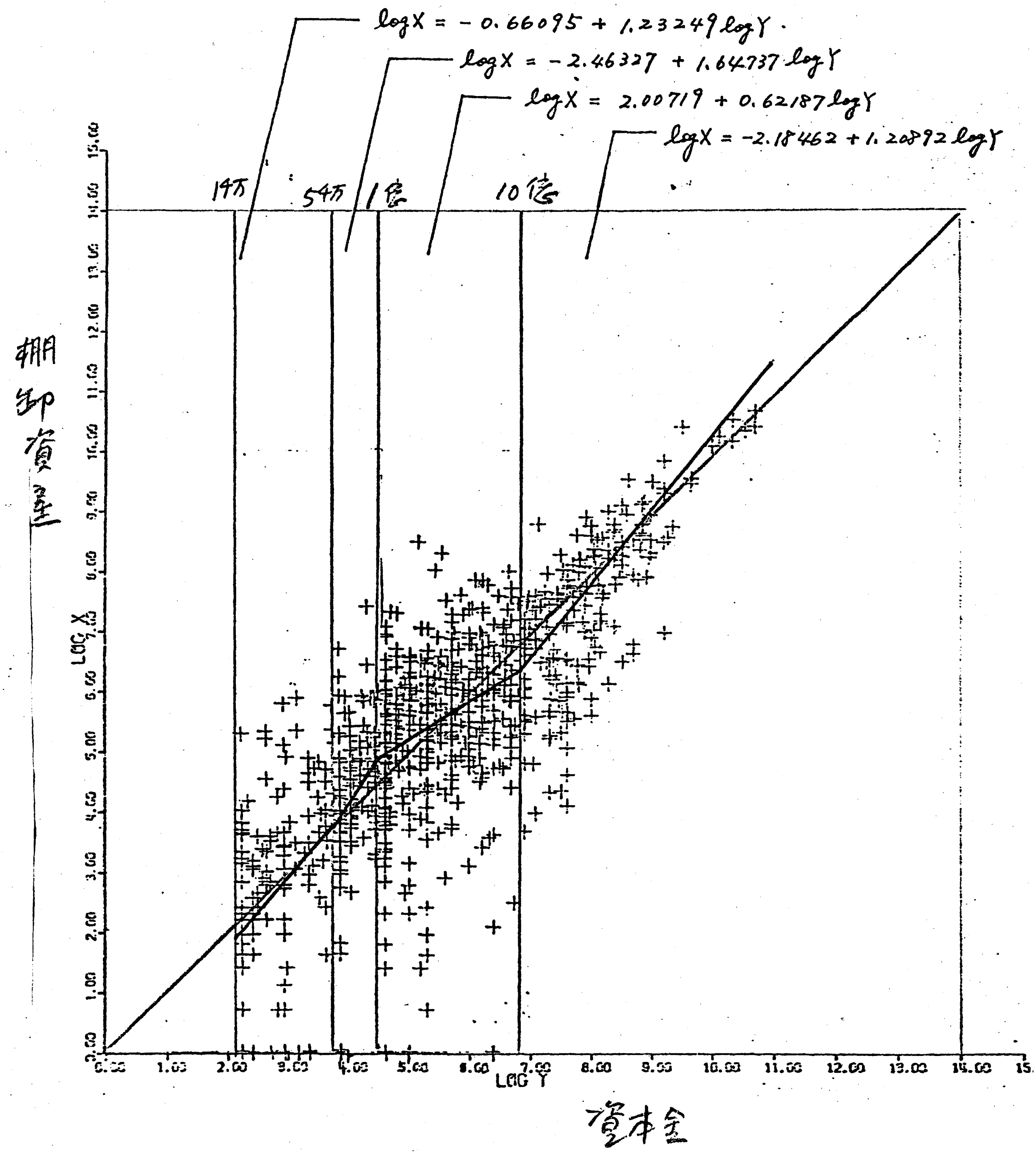
[4] 田口 時夫，ある種の最適確率抽出法の実用化とそれに適した層別法等について，「サンプリングの数理的研究予稿集」，京都大学解析研究所

資料

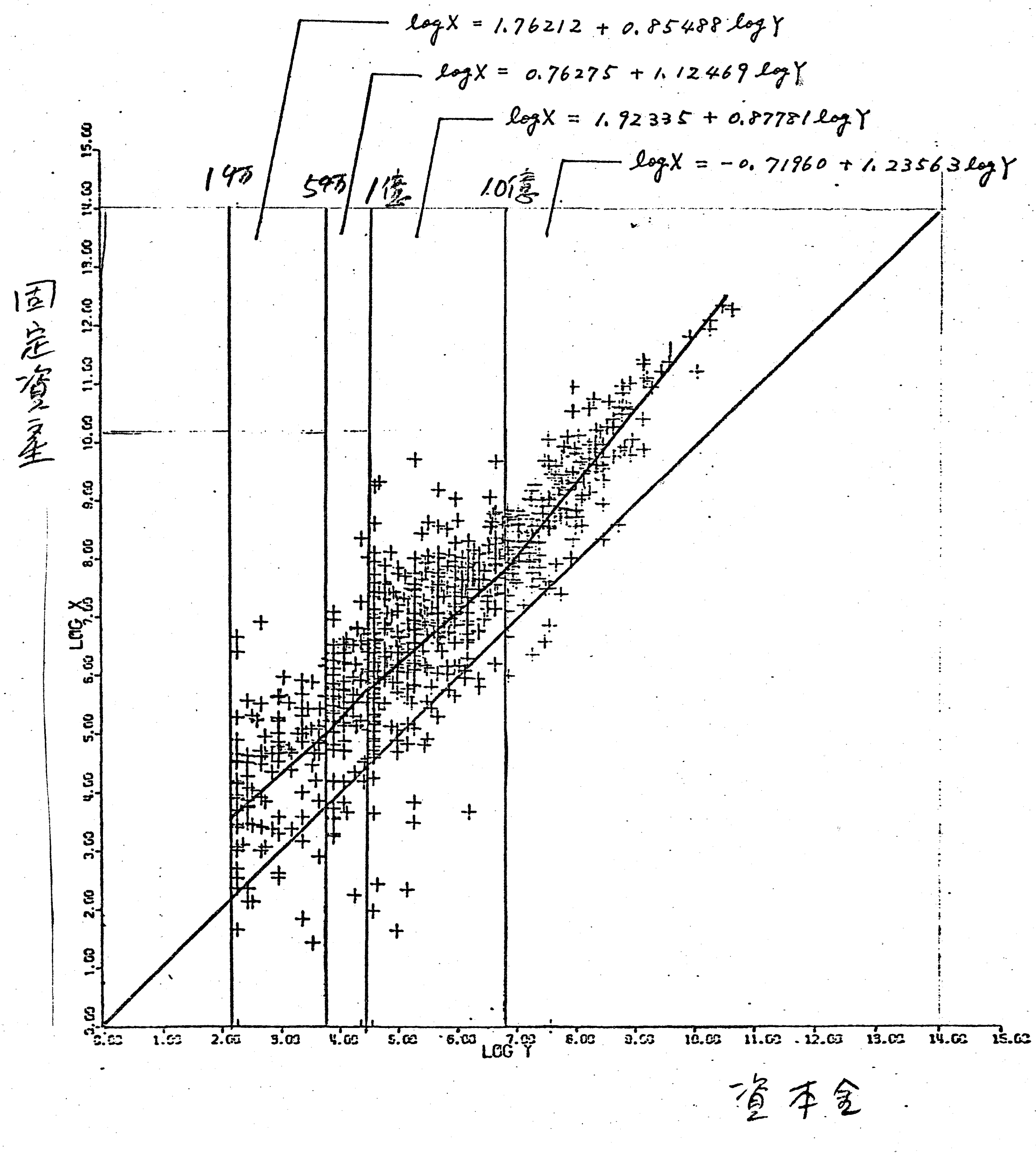
大蔵省法人企業統計調査，昭和48年4～6月期季報用調査，行度承統267号，蔵証第1446号.

第1図 資本金に対する相関図
(産業・化学，資本金14万円以上の全標本企業，
資料・昭和48年4月～6月期分法人企業統計による)

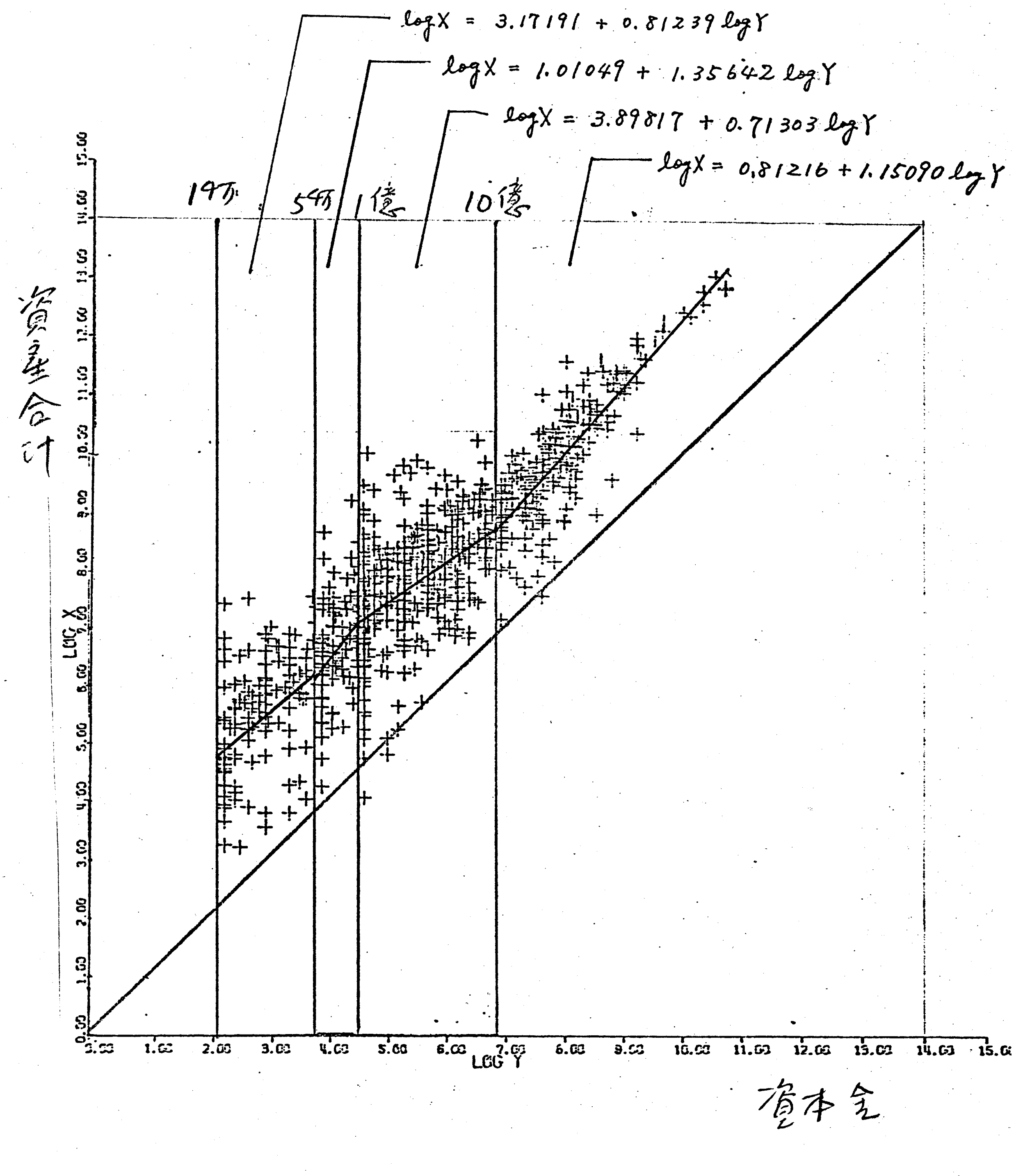
(i) 棚卸資産



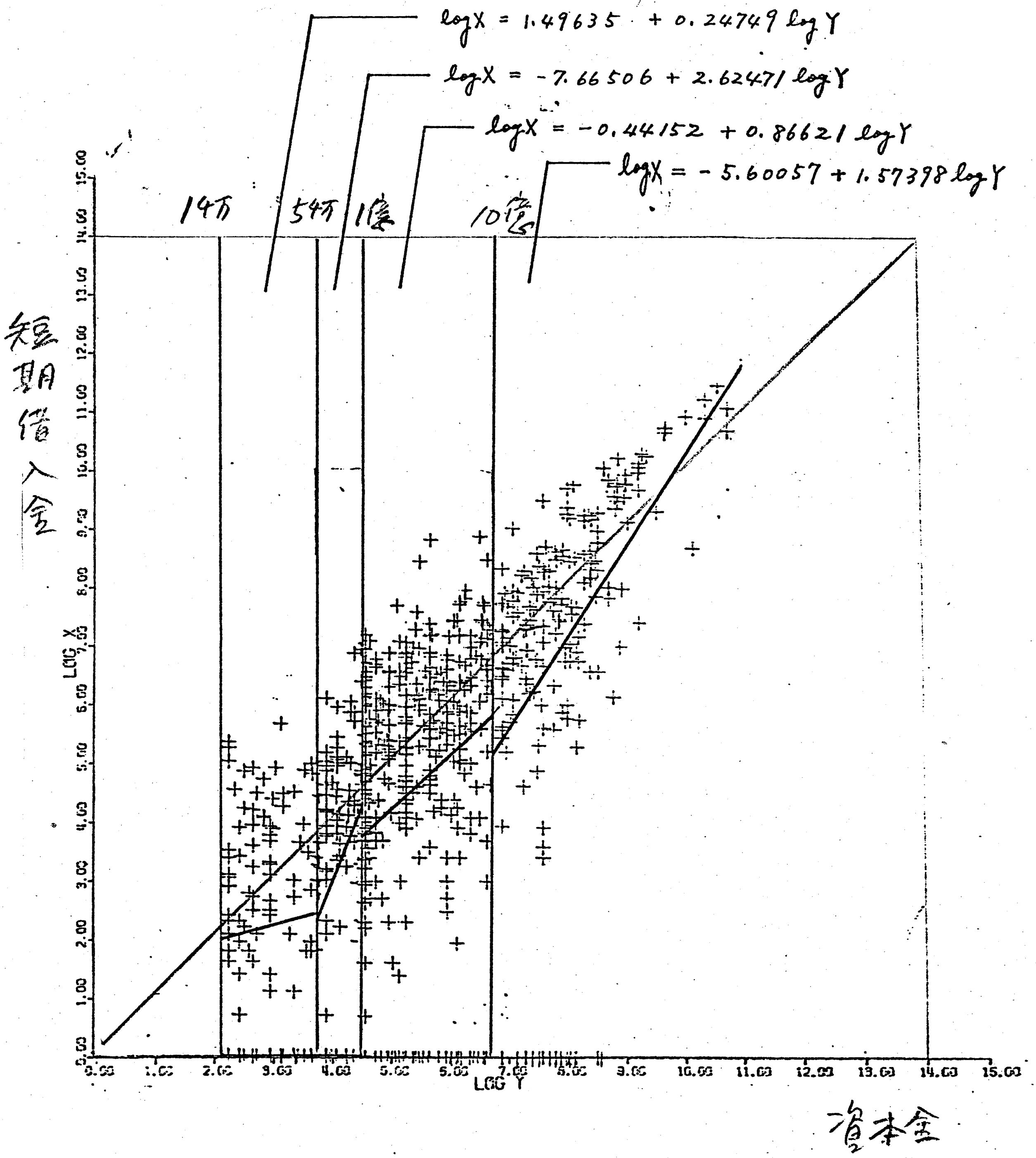
(ii) 固定資産


logX = 1.76212 + 0.85488 logY
logX = 0.76275 + 1.12469 logY
logX = 1.92335 + 0.87781 logY
logX = −0.71960 + 1.23563 logY
1千万
5千万
1億
10億
固定資産
LOG X
LOG Y
資本金

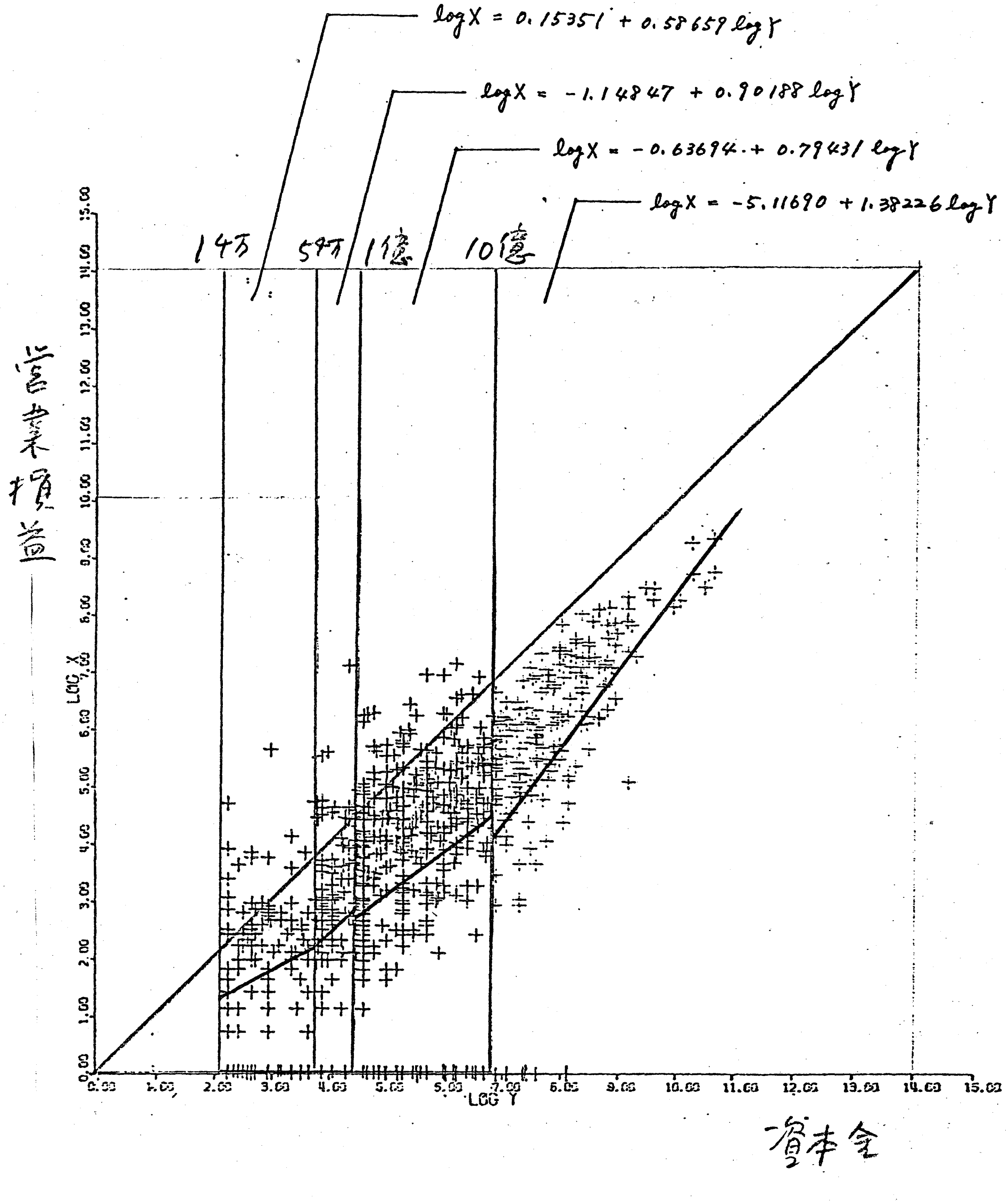
(iii) 資産合計


logX = 3.17191 + 0.81239 logY
logX = 1.01049 + 1.35642 logY
logX = 3.89817 + 0.71303 logY
logX = 0.81216 + 1.15090 logY
1千万
5千万
1億
10億
資産合計
LOG X
LOG Y
資本金
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
9.00
10.00
11.00
12.00
13.00
14.00
15.00

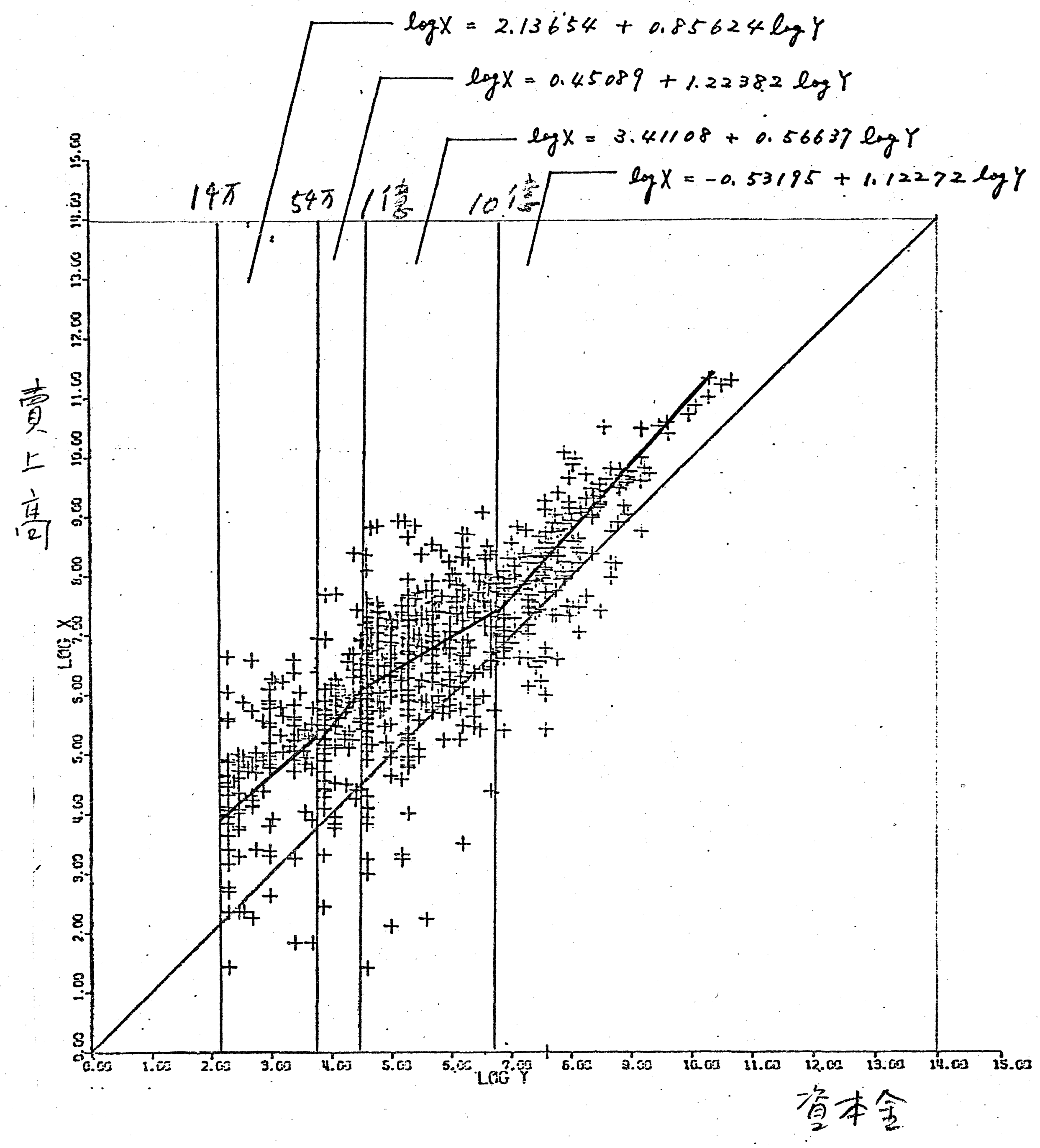
(IV) 短期借入金


logX = 1.49635 + 0.24749 logY
logX = −7.66506 + 2.62471 logY
logX = −0.44152 + 0.86621 logY
logX = −5.60057 + 1.57398 logY
14万
54万
1億
10億
短期借入金
LOG X
LOG Y
資本金

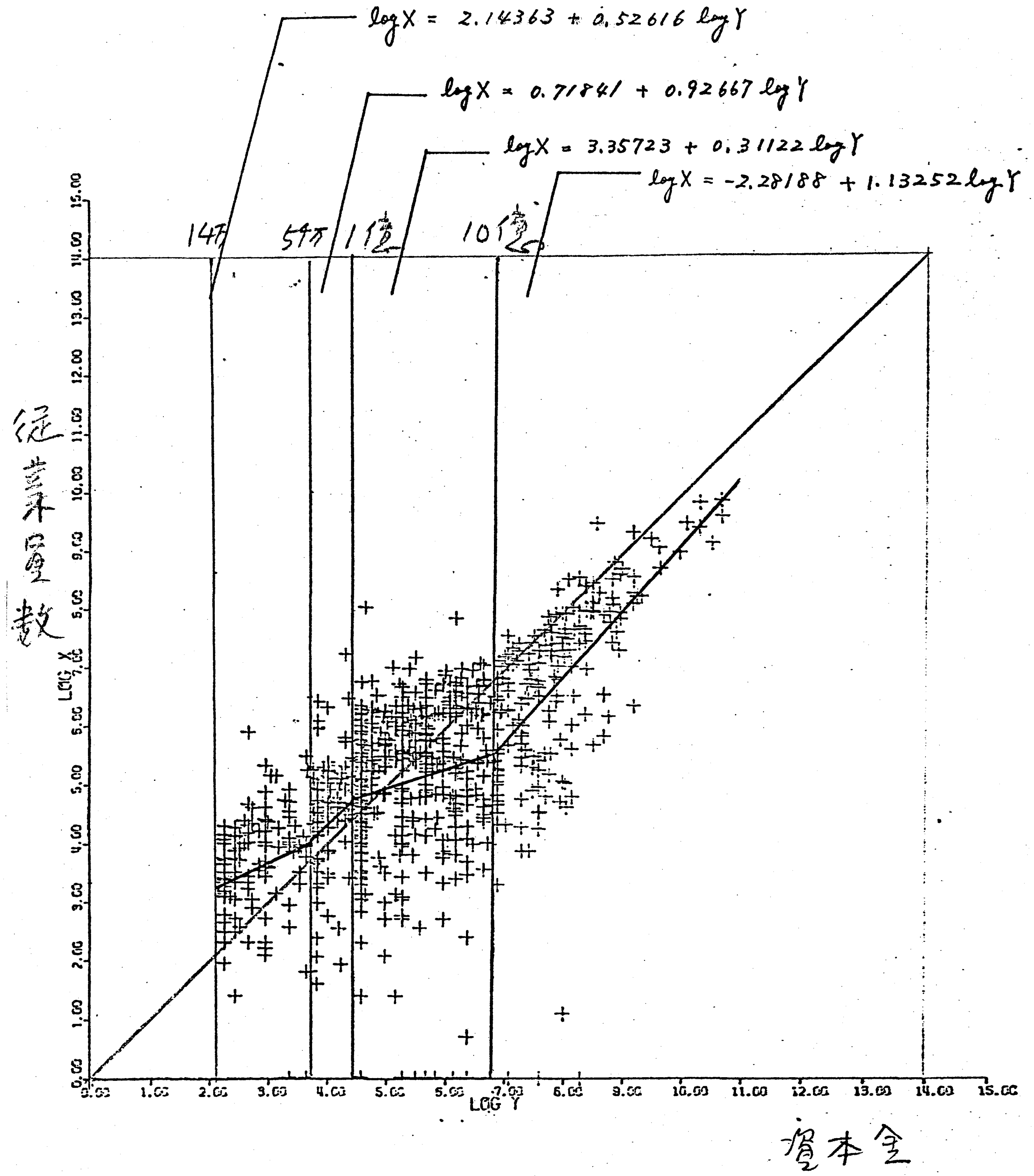
(V) 営業損益


logX = 0.15351 + 0.58659 logY
logX = -1.14847 + 0.90188 logY
logX = -0.63694 + 0.79431 logY
logX = -5.11690 + 1.38226 logY
1万
5千万
1億
10億
営業損益
LOG X
LOG Y
資本金

(VI) 賣上高


logX = 2.13654 + 0.85624 logY
logX = 0.45089 + 1.22382 logY
logX = 3.41108 + 0.56637 logY
logX = -0.53195 + 1.12272 logY
14万
54万
1億
10億
賣上高
LOG X
LOG Y
資本金

(VII) 従業員数


logX = 2.14363 + 0.52616 logY
logX = 0.71841 + 0.92667 logY
logX = 3.35723 + 0.31122 logY
logX = -2.28188 + 1.13252 logY
1千万
5千万
1億
10億
従業員数
LOG X
LOG Y
資本金

第1表 補助変量による標本精度の変動 *1

(i) 補助変量．資本金

項目 X	平均 E(X)	分散 V(X)	変動係数 C(X) *2	規模比例抽出による分散 $V_0(X)$ *3	回帰関数比例抽出による分散 $V_1(X)$ *4	平均的回帰関数比例抽出による分散 $V_2(X)$ *5	前項に対する変動係数 $C_2(X)$ *6	対数線形回帰係数 β_0'	β_1'	対数相関係数 ρ'_{xy}
1. 資本金	7269.	330714880.	2.50168	0.	0.	378064.	0.08458	0.00000	1.00000	1.00000
2. 売掛金	19249.	2066684900.	2.36174	56140032.	52153120.	50432512.	0.36894	1.21512	0.96875	0.91573
3. 棚卸資産	14541.	1265996200.	2.44692	24418096.	23883328.	23042560.	0.33012	0.72861	0.98945	0.92358
4. 固定資産	21088.	2456137900.	2.35014	108460280.	111035130.	102738940.	0.48066	0.89067	1.01372	0.92269
5. 資産合計	72257.	29409419000.	2.37336	542253050.	527982590.	504152060.	0.31074	2.37263	0.98895	0.95224
6. 買掛金	13883.	734957050.	1.95278	92506016.	63854624.	77811360.	0.63539	1.91721	0.85849	0.84668
7. 短期借入金	11116.	973282300.	2.80649	37787312.	59365520.	37542960.	0.55120	1.71000	0.73880	0.30549
8. 長期借入金	5706.	226376990.	2.63679	16699344.	17165728.	15837552.	0.69743	-1.08921	1.01872	0.46925
9. 営業損益	1707.	20353200.	2.64224	1851649.	2014525.	1691556.	0.76210	-2.38959	1.03932	0.51880
10. 売上高	19533.	1910721200.	2.23779	135089660.	116187640.	120884730.	0.56287	1.72989	0.91322	0.87864
11. 従業員数	7234.	214922410.	2.02656	9200688.	4948624.	6744736.	0.35900	1.29886	0.86166	0.91417
平均 $\bar{\beta}_1'$, $\bar{\rho}'_{xy}$ *7									0.94464	0.78612

*1 第1表における各表の計算対象は電気機械製造業のうち資本金10億円以上の全社(91社)である。

又第1表における各表の計算は凡て8桁までの計算によるものである。資料は昭和48年4月～6月期分法人企業統計による。

*2. $C(X) = \dfrac{\sqrt{V(X)}}{E(X)}$

*3. $V_0(X) = E(Y)E\left(\dfrac{X^2}{Y}\right) - E^2(X)$

*4. $V_1(X) = E(Y^{\beta_1'})\,E\left(\dfrac{X^2}{Y^{\beta_1'}}\right) - E^2(X)$

*5 $V_2(X) = E(Y^{\bar{\beta}_1'})\,E\left(\dfrac{X^2}{Y^{\bar{\beta}_1'}}\right) - E^2(X)$

*6. $C_2(X) = \dfrac{\sqrt{V_2(X)}}{E(X)}$

*7. $\bar{\beta}_1' = \dfrac{1}{11}\sum_{j=1}^{11}\beta_{1j}'$　$\bar{\rho}'_{xy} = \dfrac{1}{11}\sum_{j=1}^{11}\rho'_{x_j y}$

つまり$\bar{\beta}_1'$及び$\bar{\rho}'_{xy}$は項目間の平均を表わす

(ii) 補助変量、従業員数

コード	E(X)	V(X)	C(X)	$V_0(X)$	$V_1(X)$	$V_2(X)$	$C_2(X)$	β_0'	β_1'	ρ_{xy}'
1.	7269.	330714880.	2.50168	5534416.	6271536.	5679328.	0.32783	0.03901	0.96989	0.91417
2.	19249.	2066684900.	2.36174	45229568.	42857216.	45924352.	0.35206	0.50805	1.03141	0.91896
3.	14541.	1265996200.	2.44692	21099840.	17784672.	21695712.	0.32032	0.02447	1.05123	0.92488
4.	21088.	2456137900.	2.35014	56949760.	48956672.	58083072.	0.36140	-0.02594	1.10108	0.94464
5.	72257.	29409419000.	2.37336	334155770.	247300090.	348057600.	0.25819	1.57969	1.06169	0.96356
6.	13883.	734957050.	1.95278	46013440.	43839888.	45604432.	0.48644	1.01768	0.94768	0.88095
7.	11116.	973282300.	2.80649	43870736.	136540080.	44260432.	0.59848	2.75737	0.59097	0.23053
8.	5706.	226376990.	2.63679	18124192.	19081536.	18163440.	0.74689	-0.52515	0.92340	0.40091
9.	1707.	20353200.	2.64224	1362067.	1932659.	1360428.	0.68345	-4.11135	1.22531	0.57651
10.	19533.	1910721200.	2.23779	68896512.	68428288.	69188096.	0.42583	0.64307	1.02411	0.92874
11.	7234.	214922410.	2.02656	0.	0.	3984.	0.00873	0.00000	1.00000	1.00000
平均	$\bar{\beta}_1'$, $\bar{\rho}_{xy}'$								0.99334	0.78942

(iii) 補助変量、売上高

コード	E(X)	V(X)	C(X)	$V_0(X)$	$V_1(X)$	$V_2(X)$	$C_2(X)$	β_0'	β_1'	ρ_{xy}'
1.	7269.	330714880.	2.50168	3430656.	4121008.	3745312.	0.26623	-1.43846	0.91691	0.95224
2.	19249.	2066684900.	2.36174	20721664.	19978752.	20760576.	0.23671	-1.08075	0.97680	0.95892
3.	14541.	1265996200.	2.44692	16436096.	16440304.	17692496.	0.28927	-1.44271	0.98064	0.95063
4.	21088.	2456137900.	2.35014	22469632.	24030976.	25392384.	0.23896	-1.64503	1.03522	0.97858
5.	72257.	29409419000.	2.37336	0.	0.	41246720.	0.08888	0.00000	1.00000	1.00000
6.	13883.	734957050.	1.95278	40572544.	28997792.	32594896.	0.41124	-0.38477	0.89187	0.91350
7.	11116.	973282300.	2.80649	43651696.	95357776.	44039968.	0.59699	1.08483	0.63447	0.27247
8.	5706.	226376990.	2.63679	16790912.	16322752.	16304784.	0.70765	-2.69435	0.94779	0.45340
9.	1707.	20353200.	2.64224	1083394.	1485802.	1016964.	0.59091	-5.67276	1.12843	0.58499
10.	19533.	1910721200.	2.23779	42425600.	38072576.	37577728.	0.31382	-0.76949	0.95370	0.95295
11.	7234.	214922410.	2.02656	4734944.	2294176.	3013632.	0.23997	-0.80116	0.87451	0.96356
平均	$\bar{\beta}_1'$, $\bar{\rho}_{xy}'$								0.94003	0.81648

(iv) 補助変量、資産合計

コード	E(X)	V(X)	C(X)	$V_0(X)$	$V_1(X)$	$V_2(X)$	$C_2(X)$	β_0'	β_1'	ρ_{xy}'
1.	7269.	330714880.	2.50168	13033376.	15868560.	14562960.	0.52496	0.33991	0.84537	0.87864
2.	19249.	2066684900.	2.36174	53668352.	55871232.	65149184.	0.41932	0.41366	0.94530	0.92873
3.	14541.	1265996200.	2.44692	65124032.	68398784.	70458304.	0.57726	0.47652	0.90220	0.87528
4.	21088.	2456137900.	2.35014	50970368.	51261952.	65867520.	0.38486	0.08052	0.98600	0.93278
5.	72257.	29409419000.	2.37336	568602620.	608305150.	767270910.	0.38335	1.66911	0.95220	0.95295
6.	13883.	734957050.	1.95278	42890816.	35524720.	35352688.	0.42829	1.03912	0.85647	0.87794
7.	11116.	973282300.	2.80649	87991040.	303475450.	89385328.	0.85050	4.33750	0.35902	0.15430
8.	5706.	226376990.	2.63679	33832752.	36650784.	32360576.	0.99694	0.56834	0.71468	0.34216
9.	1707.	20353200.	2.64224	700279.	1447883.	815873.	0.52927	-5.78492	1.29749	0.67316
10.	19533.	1910721200.	2.23779	0.	0.	11145216.	0.17091	0.00000	1.00000	1.00000
11.	7234.	214922410.	2.02656	9801264.	8168256.	7942000.	0.38957	0.57319	0.84224	0.92874
平均	$\bar{\beta}_1'$, $\bar{\rho}_{xy}'$								0.88191	0.77679

第2表　最少二乗対数線形回帰比例確率抽出法のシミュレーション結果 (1)

(但し　実現率 = $\dfrac{\text{標本推定平均}}{\text{母平均}}$ とする)

補助変量－資本金　機械　10億～100億　1/2抽出　$\overline{\beta_1}=0.82350$

Simulation No.	等確率 平均実現率	等確率 実現率の二乗偏差	規模比例 平均実現率	規模比例 実現率の二乗偏差	回帰関数 $(Y^{\overline{\beta_1}})$ 比例 平均実現率	回帰関数 $(Y^{\overline{\beta_1}})$ 比例 実現率の二乗偏差
①	1.16015	0.00822	0.95220	0.00367	1.01280	0.00782
②	1.04883	0.00229	1.07275	0.01285	0.99996	0.00662
③	0.96259	0.00214	0.84075	0.00685	0.86358	0.00489
④	1.08197	0.00523	0.94861	0.00228	1.13707	0.01609
⑤	0.78653	0.00431	0.92178	0.00714	0.86541	0.00479
⑥	0.91285	0.00312	1.02883	0.00300	0.99397	0.00334
⑦	0.94394	0.00911	1.10323	0.01390	1.07417	0.00671
⑧	0.85639	0.01018	0.98102	0.00435	0.95815	0.00653
⑨	0.98826	0.00390	0.82320	0.00862	0.96251	0.00606
⑩	0.91731	0.00460	0.88659	0.01336	0.89630	0.01611
平均	0.96588	0.00531	0.95590	0.00760	0.97639	0.00790

補助変量－資本金　電気　10億～100億　1/2抽出　$\overline{\beta_1}=0.85603$

Simulation No.	等確率 平均実現率	等確率 実現率の二乗偏差	規模比例 平均実現率	規模比例 実現率の二乗偏差	回帰関数 $(Y^{\overline{\beta_1}})$ 比例 平均実現率	回帰関数 $(Y^{\overline{\beta_1}})$ 比例 実現率の二乗偏差
①	0.74754	0.00414	0.90305	0.00294	0.98108	0.00985
②	0.99339	0.03117	1.18193	0.00676	1.07986	0.00389
③	0.88875	0.00152	1.09394	0.00474	0.93313	0.00206
④	0.81477	0.00431	1.01317	0.00435	0.99618	0.00338
⑤	1.21271	0.01641	1.08137	0.00198	0.89082	0.01047
⑥	0.83859	0.00484	0.91318	0.00228	0.93770	0.00168
⑦	0.83362	0.00729	0.89277	0.00450	0.89048	0.00613
⑧	0.78460	0.00664	1.05391	0.00343	1.06070	0.00351
⑨	0.96584	0.00720	1.03994	0.00496	0.99104	0.00979
⑩	1.18683	0.01322	1.00847	0.00600	1.14388	0.00489
平均	0.92666	0.00967	1.01817	0.00419	0.99049	0.00557

抽出法のシミュレーション結果 (2)

補助変量－従業員　機械　10億～100億　1/2抽出　$\bar{\beta}' = 0.83911$

Simulation NO	等確率 平均実現率	等確率 実現率の二乗偏差	規模比例 平均実現率	規模比例 実現率の二乗偏差	回帰係数($Y^{\bar{\beta}'}$比例) 平均実現率	回帰係数($Y^{\bar{\beta}'}$比例) 実現率の二乗偏差
①	0.99725	0.00230	0.94540	0.00744	0.98574	0.00971
②	1.32889	0.01021	0.84734	0.01126	0.83193	0.01172
③	0.84987	0.00194	0.92289	0.00161	0.97356	0.00518
④	0.93880	0.00922	0.99399	0.00727	1.00418	0.00834
⑤	0.99347	0.01251	0.98494	0.00479	0.92367	0.00848
⑥	1.05502	0.01070	1.00973	0.00224	1.01957	0.00392
⑦	0.77918	0.00654	0.95073	0.02109	1.03850	0.00170
⑧	1.23427	0.01219	1.00675	0.00296	1.06025	0.00455
⑨	0.98567	0.02366	0.85934	0.01185	0.88238	0.00688
⑩	1.13293	0.00299	0.85379	0.00666	0.84691	0.02084
平均	1.02954	0.00923	0.93749	0.00772	0.95667	0.00813

補助変量－従業員　電気　10億～100億　1/2抽出　$\bar{\beta}_1' = 0.77533$

Simulation NO	等確率 平均実現率	等確率 実現率の二乗偏差	規模比例 平均実現率	規模比例 実現率の二乗偏差	回帰係数($Y^{\bar{\beta}'}$比例) 平均実現率	回帰係数($Y^{\bar{\beta}'}$比例) 実現率の二乗偏差
①	1.34996	0.01629	0.99157	0.00858	1.01200	0.01499
②	0.82482	0.00258	1.02103	0.00472	1.01000	0.00718
③	0.94718	0.00947	0.98016	0.00372	0.98405	0.00503
④	1.00313	0.00618	0.94988	0.00815	0.93937	0.00235
⑤	0.79130	0.00840	0.93653	0.01449	0.94958	0.00230
⑥	1.00742	0.00272	1.02788	0.01265	0.97233	0.00730
⑦	0.81502	0.00464	1.03546	0.00562	0.98361	0.00186
⑧	0.93338	0.00496	0.86391	0.00662	0.91406	0.00255
⑨	0.90189	0.00672	0.98250	0.00238	1.02756	0.00223
⑩	0.83932	0.00684	0.95596	0.00604	0.98588	0.00841
平均	0.94134	0.00688	0.97449	0.00730	0.97784	0.00542

抽出法のシミュレーション結果（3）

補助変量 － 資本金

機械　10億～100億　1/2抽出

項目	母平均	等確率		規模比例		回帰係数(β_i)比例	
		$\widehat{X}_{0,h}$	(実現率)	$\widetilde{X}_{1,h}$	(実現率)	$\widehat{X}_{\beta i,h}$	(実現率)
1. 資本金	2852	2887	(1.012)	2852	(1.000)	2919	(1.023)
2. 売掛金	9592	11411	(1.190)	9062	(0.945)	8819	(0.919)
3. 棚卸資産	6179	7596	(1.229)	6234	(1.009)	6560	(1.062)
4. 固定資産	8512	9135	(1.073)	7378	(0.867)	8304	(0.976)
5. 資産合計	31151	36509	(1.172)	29124	(0.935)	30374	(0.975)
6. 買掛金	7042	9191	(1.305)	6756	(0.959)	6618	(0.940)
7. 短期借入金	6126	7428	(1.213)	5226	(0.853)	5855	(0.956)
8. 長期借入金	3743	4379	(1.170)	3972	(1.061)	4134	(1.104)
9. 営業損益	574	671	(1.169)	578	(1.007)	711	(1.239)
10. 売上高	6628	8153	(1.230)	6100	(0.920)	6526	(0.985)
11. 従業員数	2574	2569	(0.998)	2359	(0.916)	2473	(0.961)
平均			(1.160)		(0.952)		(1.013)